

doi:10.3969/j.issn.1007-7162.2012.03.011

条件点错误情况下交叉立方体中 哈密顿圈的存在性讨论

殷超杰, 郭大昌, 郑健微

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510520)

摘要: 交叉立方体的容错性研究备受学者关注. 本文在条件节点错(每一个健康节点至少还有其它两个健康节点与之相邻)的条件下, 证明了 $n(n \geq 4)$ 维交叉立方体中错误节点的个数达到 $2n - 7$ 个时哈密顿圈的存在性.

关键词: 交叉立方体; 条件点错; 哈密顿圈; 容错

中图分类号: O177.91 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-7162(2012)03-0059-04

Fault-free Hamiltonian Cycles in Crossed Cubes with Conditional Node Faults

Yin Chao-jie, Guo Da-chang, Zheng Jian-wei

(School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China)

Abstract: The crossed cube which is a topological structure of the network has received much attention from scholars worldwide, and studies of its fault-tolerance are also a major concern. In the situation of conditional node fault (each fault-free node is adjacent to at least two other fault-free nodes), it discusses that while $n \geq 4$, the Hamiltonian cycles exist in a n -dimensional crossed cube, even if the number of faulty nodes is up to $2n - 7$.

Key words: crossed cube; conditional node fault; Hamiltonian cycle; fault tolerance

在并行运算系统中,互连网络为处理器之间的数据传输提供了一种有效的途径.通常把网络结构作为一个图来处理,把图的节点和图的边分别看作是网络结构的处理器和处理器间的通信关系.在设计和分析互连网络时,其图嵌入能力是一个主要问题,其中路和圈的嵌入尤为重要.交叉立方体作为一种重要的拓朴网络结构,具有直径短、递归结构简单等特点,文献[1-9]对其交叉立方体圈和路的嵌入性能进行了研究.在容错方面,Yang 等^[9]证明了当 n 维交叉立方体 CQ_n 中含有 f_v 个错误节点和 f_e 条错误边并且 $f_v + f_e \leq n - 2$ 时, CQ_n 中存在从长为 4 到长为 $2^n - f_v$ 的圈. Huang 等^[5]突破性地证明了当错误边的数目达到 $2n - 5$ 时, CQ_n 中依然存在哈密顿圈. Dong 等^[10]证明了当 $n \geq 5$, CQ_n 中错误节点的个数 $f \leq 2n - 7$ 时, CQ_n 中存在长至少为 $2^n - f - (n - 5)$ 的圈. 本文在假定每一个健康节点至少还有其它两个健康节点相邻的条件下,证明了在错误节点个数 $f \leq 2n - 7$

时, $CQ_n (n \geq 4)$ 中至少存在一个哈密顿圈,将 CQ_n 中节点错误时圈的可嵌入结果进行了改进和优化.

1 预备知识

互连网络可以用一个无向图来表示,图的节点表示网络中的处理器,图的边表示处理器之间的物理连线,整篇文章里网络、处理器、连线 and 图、节点、边是可以互相交换的.在给出交叉立方体的定义之前先给出一个重要的定义 1.

定义 1^[11] 两个二元序列 $x = x_1x_0, y = y_1y_0$ 称为关联对,记为 $x \sim y$,当且仅当 $(x, y) \in \{(00, 00), (10, 10), (01, 11), (11, 01)\}$.

用 CQ_n 表示 n 维的交叉立方体, CQ_n 可以用递归定义来表示. CQ_1 是顶点标号分别为 0 和 1 的完全图 K_2 ; $n \geq 2$ 时, CQ_n 是由两个 $n - 1$ 的交叉立方体 CQ_{n-1} , 分别记为 CQ_{n-1}^1 和 CQ_{n-1}^0 , 用 2^{n-1} 条边连接起来, CQ_{n-1}^1 的任一顶点 $u = 1, u_{n-2}u_{n-3} \dots u_0$ 和 CQ_{n-1}^0

中的任一顶点 $v=0, v_{n-2}v_{n-1}\cdots v_0$ 在 CQ_n 中相邻当且仅当

- 1) 如果 n 是偶数, $u_{n-2}=v_{n-2}$;
- 2) 当 $0\leq i\leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ 时, $(u_{2i+1}u_{2i}, v_{2i+1}v_{2i})\in \{(00,00), (10,10), (01,11), (11,01)\}$.

定义 2^[11-12] 交叉立方体 CQ_n 的顶点集为 $\{v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0 \mid v_i\in \{0,1\} 0\leq i\leq n-1\}$, 两个顶点 $u=$

$u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v=v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0$ 相邻当且仅当存在 $0\leq d\leq n-1$:

- 1) $u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_{d+1}=v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_{d+1}$;
- 2) $u_d\neq v_d$;
- 3) 如果 d 是奇数, $u_{d-1}=v_{d-1}$;
- 4) 当 $0\leq i\leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ 时, $u_{2i+1}u_{2i}\sim v_{2i+1}v_{2i}$.

例如, 图 1(a) 表示 CQ_3 , 图 1(b) 表示 CQ_4 .

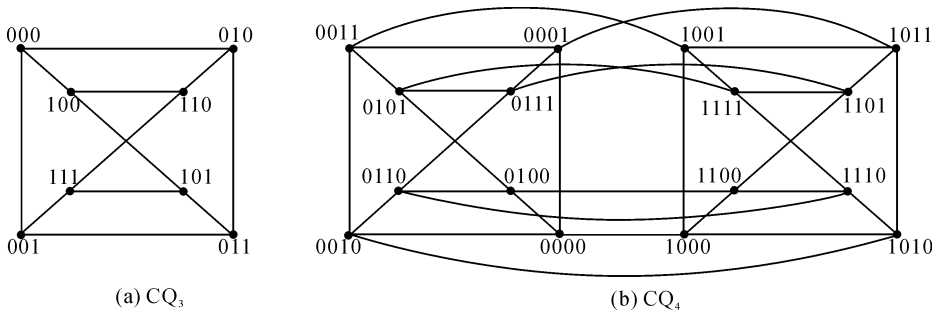


图 1 三维交叉立方体和四维交叉立方体

Fig. 1 The 3-dimensional crossed cube CQ_3 and The 4-dimensional crossed cube CQ_4

下面的两个重要引理将在本文结论的证明中多次用到.

引理 1^[4] 当 $n\geq 3$ 时, 如果 CQ_n 中错误节点的个数 $f\leq n-2$, 那么 CQ_n 中存在一个哈密顿圈, 并且当 $f\leq n-3$ 时, CQ_n 中任意两节点之间存在一条哈密顿路.

引理 2^[13] 当 $n\geq 5$ 时, CQ_n 中任意 4 个不同的节点 u, v 和 x, y , 存在两条 $P_{u,v}$ 和 $P_{x,y}$ 路, 使得 $V(P_{u,v})\cap V(P_{x,y})=\phi$ 并且 $V(P_{u,v})\cup V(P_{x,y})=V(CQ_n)$.

2 定理及其证明

根据上述两个引理可以得出如下结论.

定理 若 n 维交叉立方体 CQ_n 中, 每一个健康节点至少还有其它两个健康节点与之相邻, 当 $n\geq 4$ 时, 只要 CQ_n 中错误节点的个数 $f\leq 2n-7$, 则 CQ_n 中至少存在一个长为 2^n-f 的哈密顿圈.

证明 根据交叉立方体的递归结构性质, 用数学归纳法讨论 n 维交叉立方体 CQ_n . 当 $n=4$ 时, 由引理 1 知该定理是成立的; 假设当 $n=k(k\geq 5)$ 时定理在 CQ_k 上成立, 则下面证明当 $n=k+1$ 时, 即在 CQ_{k+1} 中 $f\leq 2k-5$ 时存在长为 $2^{k+1}-f$ 的哈密顿圈. 用 f_0 和 f_1 分别表示 CQ_{k+1}^0 和 CQ_{k+1}^1 中错误节点的个数, 不失一般性, 假设 $f_0\geq f_1$, 则

- 1) 当 $f_0\leq k-3$ 时, 因为 CQ_{k+1}^0 和 CQ_{k+1}^1 之间存在 $2^k\geq 2k-3\geq f+2$ 条桥边, 任选两条健康桥边 $(x_0,$

$x_1)$ 和 (y_0, y_1) . 则由引理 1, 在 CQ_{k+1}^0 中节点 x_0 和 y_0 之间至少存在一条哈密顿路, 记作 P_0 ; 在 CQ_{k+1}^1 中节点 x_1 和 y_1 之间也至少存在一条哈密顿路, 记作 P_1 . 因此, $\langle x_0, P_0, y_0, y_1, P_1, x_1, x_0 \rangle$ 构成 CQ_{k+1} 中的一个哈密顿圈 C . 如图 2 所示,

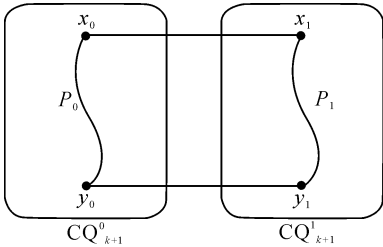


图 2 $f_0\leq k-3$ 时构造 CQ_{k+1} 中的哈密顿圈

Fig. 2 Construct a Hamilton cycle in CQ_{k+1} in case $f_0\leq k-3$

- 2) 当 $k-2\leq f_0\leq 2k-7$ 时, 由假设知 CQ_{k+1}^0 中至少存在一个长为 2^k-f_0 的哈密顿圈 C_0 . 因为 CQ_{k+1}^1 中错误节点的个数 $f_1\leq k-3<\frac{2^k-f_0}{2}$, 并且 C_0 上含有 2^k-f_0 条边, 所以 C_0 上至少存在一条边 (x_0, y_0) 使得 x_0 和 y_0 在 CQ_{k+1}^1 中的邻接点 x_1 和 y_1 都是健康的, 即存在两条健康桥边 (x_0, x_1) 和 (y_0, y_1) , 记 C_0 为 $\langle x_0, P_0, y_0, x_0 \rangle$, 其中 P_0 是长为 $l_0=2^k-f_0-1$ 的一条路. 由于 $f_1=f-f_0\leq k-3$, 所以由引理 1, 在 CQ_{k+1}^1 中 x_1 和 y_1 之间至少存在一条长为 $l_1=2^k-f_1-1$ 的哈密顿路 p_1 , 因此 $\langle x_0, P_0, y_0, y_1, P_1, x_1,$

$x_0 >$ 在 CQ_{k+1} 中构成一条长为 $l_0 + l_1 + 2 = 2^{k+1} - f$ 的哈密顿圈,如图3所示.

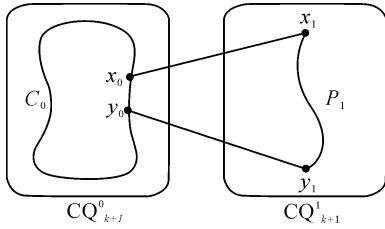


图3 $k-2 \leq f_0 \leq 2k-7$ 时构造 CQ_{k+1} 中的哈密顿圈

Fig.3 Construct a Hamilton cycle in CQ_{k+1}

in case $k-2 \leq f_0 \leq 2k-7$

3) 当 $f_0 = 2k-6$ 时,假定 CQ_{k+1}^0 中一个错误点 z 为健康节点,由假设知 CQ_{k+1}^0 中至少存在一条长为 $2^k - f_0$ 且包含 z 的哈密顿圈 C_0 . 假设 z 在 C_0 上的两个邻接点为 x_0 和 y_0 , 并且 x_0 和 y_0 在 CQ_{k+1}^1 中的邻接点分别为 x_1 和 y_1 .

(1) 当 x_1 和 y_1 均为健康节点时,把 C_0 记作 $\langle x_0, z, y_0, p_0, x_0 \rangle$. 其中 p_0 是 C_0 上长为 $l_0 = 2^k - (f_0 - 1) - 1$ 的路,由于 $f_1 \leq f - f_0 \leq 1 \leq k-3$,由引理1,在 CQ_{k+1}^1 中 x_1 和 y_1 之间至少存在一条长为 $l_1 = 2^k - f_1 - 1$ 哈密顿路 p_1 ,因此在 CQ_{k+1} 中 $\langle x_0, p_0, y_0, y_1, p_1, x_1, x_0 \rangle$ 构成一个长为 $l_0 + l_1 + 2 = 2^{k+1} - f$ 的哈密顿圈,如图4所示.

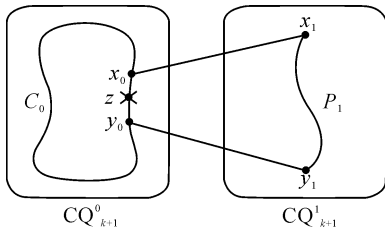


图4 $f_0 = 2k-6$ 时(1)情况下构造 CQ_{k+1} 中的哈密顿圈

Fig.4 Construct a Hamilton cycle in CQ_{k+1}

in case (1) $f_0 = 2k-6$

(2) 当 x_1 和 y_1 之间有一个是错误节点时,不妨设 x_1 是错误节点,由条件点错误,则在 C_0 上 x_0 还有至少两个相邻节点 u 和 v_0 , 并假设 v_0 在 C_0 上的另外两个相邻节点分别为 f_0 和 e_0 , 以及它们在 CQ_{k+1}^1 中的节点 v_1, f_1 和 e_1 . 由引理2,在 CQ_{k+1}^1 中存在两条不相交的路 p_1 和 p_2 使得:(1) p_1 是连接 v_1 和 e_1 的路, p_2 是连接 f_1 和 y_1 的路;(2) $V(p_1 \cup p_2) = V(CQ_{k+1}^1) - x_1$. 因此 CQ_{k+1} 中存在一个形如 $\langle x_0, u, f_0, f_1, p_2, y_1, y_0, e_0, e_1, p_1, v_1, v_0, x_0 \rangle$ 的圈,该圈的长为 $[2^k - (f_0 - 1) - 3] + 4 + (2^k - f_1 - 2) = 2^{k+1} - f$,即 CQ_{k+1} 存在一个哈密顿圈. 如图5所示.

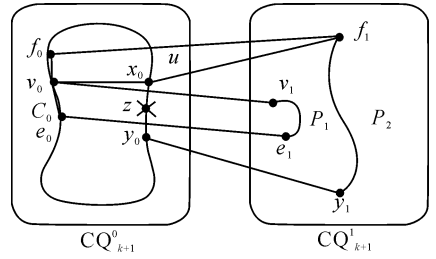


图5 $f_0 = 2k-6$ 时(2)情况下构造 CQ_{k+1} 中的哈密顿圈

Fig.5 Construct a Hamilton cycle in CQ_{k+1}

in case (2) $f_0 = 2k-6$

4) 当 $f_0 = f = 2k-5$ 时,假定 CQ_{k+1}^0 中两个错误节点 z 和 w 均为健康节点,则由假设可知, CQ_{k+1}^0 上至少存在一个长为 $2^k - f_0$ 且包含 z 和 w 的哈密顿圈 C_0 . 接下来用 $d_{c_0}(z, w)$ 来表示 z 和 w 之间在 C_0 上的最短距离.

(1) 当 $d_{c_0}(z, w) = 1$ 时,假设 z 和 w 在 C_0 上的邻接点分别为 x_0 和 y_0 , 并且 x_0 和 y_0 在 CQ_{k+1}^1 中的邻接点分别是 x_1 和 y_1 . 由于 $f_1 = 0$, 所以 x_1 和 y_1 均为健康节点. 可以把 C_0 记作 $\langle x_0, z, w, y_0, p_0, x_0 \rangle$, 则路 p_0 的长为 $l_0 = 2^k - (f_0 - 2) - 3$. 由引理1, CQ_{k+1}^1 中节点 x_1 和 y_1 之间至少存在一条长为 $l_1 = 2^k - 1$ 的哈密顿路 p_1 , 因此圈 $\langle x_0, p_0, y_0, y_1, p_1, x_1, x_0 \rangle$ 在 CQ_{k+1} 上构成了一个长为 $l = l_0 + l_1 + 2 = 2^{k+1} - f$ 哈密顿圈,如图6所示.

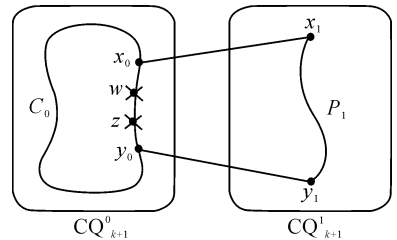


图6 $d_{c_0}(z, w) = 1$ 时构造 CQ_{k+1} 中的哈密顿圈

Fig.6 Construct a Hamilton cycle in CQ_{k+1}

in case $d_{c_0}(z, w) = 1$

(2) 当 $d_{c_0}(z, w) = 2$ 时,记 C_0 为 $\langle x_0, z, u, w, y_0, v_0, e_0, x_0 \rangle$, 由于每一个健康节点至少和另外两个健康节点相邻,那么 u 至少还有一个相邻节点 v_0 在 C_0 上,另一个相邻节点 u_1 在 CQ_{k+1}^1 中. 假设 v_0 在 C_0 上另一个异于 u 的邻节点为 e_0 , 并且 x_0, y_0, e_0 在 CQ_{k+1}^1 中的邻节点分别为 x_1, y_1, e_1 , 则由引理2,在 CQ_{k+1}^1 中存在两条不相交的路 p_1 和 p_2 使得: ① p_1 是连接 u_1 和 e_1 的路, p_2 是连接 x_1 和 y_1 的路; ② $V(p_1 \cup p_2) = V(CQ_{k+1}^1)$. 因此可以得到圈 $\langle x_0, x_1, p_2, y_1, y_0, v_0, u, u_1, p_1, e_1, e_0, x_0 \rangle$, 并且它的长度为 $[2^k - (f_0 - 2) - 4] + 4 + (2^k - 2) = 2^{k+1} - f$, 显然该圈为 CQ_{k+1} 的一

个哈密顿圈,如图7所示.

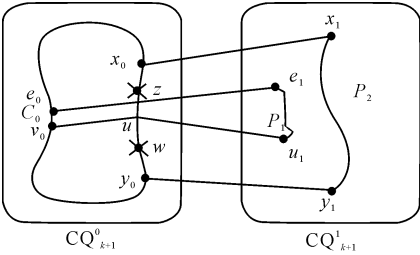


图7 $d_{c_0}(z, w) = 2$ 时构造 CQ_{k+1} 中的哈密顿圈

Fig.7 Construct an Hamilton cycle in CQ_{k+1} in case $d_{c_0}(z, w) = 2$

(3) 当 $d_{c_0}(z, w) \geq 3$ 时,把圈 C_0 记为 $\langle x_0, z, y_0, p_{01}, u_0, w, v_0, p_{02}, x_0 \rangle$, 并且记路 p_{01} 和 p_{02} 的长分别为 l_{01} 和 l_{02} , 则 $l_{01} + l_{02} = 2^k - (f_0 - 2) - 4$, 令 x_0, y_0, u_0 和 v_0 在 CQ_{k+1}^1 中的邻节点分别为 x_1, y_1, u_1 和 v_1 , 由于 $f_1 = 0$, 所以由引理 2, CQ_{k+1}^1 中存在两条不相交的路 p_{11} 和 p_{12} 满足: ① p_{11} 是连接 x_1 和 y_1 的路, p_{12} 是连接 u_1 和 v_1 的路; ② $V(p_{11} \cup p_{12}) = V(CQ_{k+1}^1)$. 令 p_{11} 和 p_{12} 的长分别为 l_{11} 和 l_{12} , 则有 $l_{11} + l_{12} = 2^k - 2$. 因此 $\langle x_0, x_1, p_{11}, y_1, y_0, p_{01}, u_0, u_1, p_{12}, v_1, v_0, p_{02}, x_0 \rangle$ 构成一个长为 $l = l_{01} + l_{02} + l_{11} + l_{12} + 4 = 2^{k+1} - f$ 的圈, 显然该圈是 CQ_{k+1} 在含有 f 个错误接点情况下的哈密顿圈. 如图 8 所示.

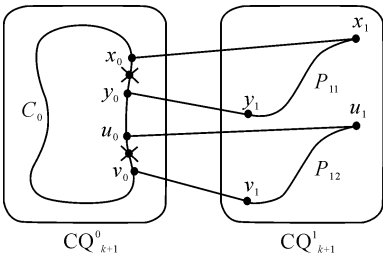


图8 $d_{c_0}(z, w) \geq 3$ 时构造 CQ_{k+1} 中的哈密顿圈构造 CQ_{k+1} 中的哈密顿圈

Fig.8 Construct an Hamilton cycle in CQ_{k+1} in case $d_{c_0}(z, w) \geq 3$

由以上讨论,定理得证,即 $n(n \geq 4)$ 维交叉立方体 CQ_n 中,当每一个健康接点至少有其它两个健康节点与之邻接时,只要 CQ_n 中错误节点的个数 $f \leq 2n - 7$, 则 CQ_n 中至少存在一个长为 $2^n - f$ 哈密顿圈.

3 结论

本文主要研究了交叉立方体中含有 $2n - 7$ 个错误节点时哈密顿圈的可嵌入性问题. 并通过对错误点的各种分布情况的详尽讨论,借助条件节点错误的假设,利用数学归纳法严密地证明了 CQ_n 中在

含有 $2n - 7$ 个错误节点时,仍然可以嵌入一个长为 $2^n - f$ 的哈密顿圈. 文中对各种情况的分析方法以及条件节点错误的假设,为交叉立方体圈和路可嵌入性研究提供了一种新的思路,而且这种分类讨论也是严密完整的.

参考文献:

[1] Fan J, Jia X, Lin X. Complete path embeddings in crossed cubes [J]. Information Sciences, 2006, 176 (22): 3332-3346.

[2] Fan J, Lin X, Jia X. Optimal path embedding in crossed cubes [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2005, 16 (12): 1190-1200.

[3] Fu J S, Hung H S, Chen G H. Embedding fault-free cycles in crossed cubes with conditional link faults [J]. Journal of Supercomputing, 2009, 49 (2): 219-233.

[4] Huang W T, Chuang Y C, Tan J M, et al. On the fault-tolerant hamiltonicity of faulty crossed cubes [J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences 2002, E85-A (6): 1359-1370.

[5] Hung H S, Fu J S, Chen G H. Fault-free Hamiltonian cycles in crossed cubes with conditional link faults [J]. Information Sciences, 2007, 177 (24): 5664-5674.

[6] Ma M, Liu G, Xu J M. Fault-tolerant embedding of paths in crossed cubes [J]. Theoretical Computer Science, 2008, 407 (1-3): 110-116.

[7] Wang D. On embedding Hamiltonian cycles in crossed cubes [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2008, 19 (3): 334-346.

[8] Xu J M, Ma M, Lu M. Paths in Mobius cubes and crossed cubes [J]. Information Processing Letters, 2006, 97 (3): 94-97.

[9] Yang M C, Li T K, Tan J M, et al. Fault-tolerant cycle-embedding of crossed cubes [J]. Information Processing Letters, 2003, 88 (4): 149-154.

[10] Dong Q, Yang X. Embedding a long fault-free cycle in a crossed cube with more faulty nodes [J]. Information Processing Letters, 2010, 110: 464-468.

[11] Efe K. The crossed cube architecture for parallel computation [J]. Parallel and Distributed Systems, IEEE Transactions on, 1992, 3 (5): 513-524.

[12] K Eft P K B W. Topological properties of the crossed cube architecture [J]. Parallel computing, 1994, 20: 1763-1775.

[13] Park J H, Kim H C, Lim H S. Many-to-many disjoint path covers in hypercube-like interconnection networks with faulty elements [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2006, 17 (3): 227-240.